Дәріс 7

Ішектің тербеліс теңдеуі үшін Фурье әдісі.

1. Ішектің тербеліс теңдеуі үшін Коши есебі.Даламбер формуласы.

Бұл мәселе осы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

теңдеуінің

$$u\big|_{x=0} = 0 \qquad u\big|_{x=l} = 0 \qquad (2)$$

шекаралық шарттарын және

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_1(x) \qquad (3)$$

бастапқы шартарын қанағаттандыратын шешімін табудан тұрады. Алдымен (1) теңдеудің шешімін нолге тең болмаған және (2) шекаралық шарттарын қанағаттандыратын шешімін

$$u(x,t) = X(x)T(t) \qquad (4)$$

көріністе іздейміз.Бұл жерде X(x) ті тек x ке , ал T(t) ны тек t ға тиісті деп есептейміз. (4) тің оң жағын (1) теңдеудегі $u(x,t)$ ның алып барып қоямыз:

$$XT'' = a^2 XT \qquad \text{немесе} \qquad \frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} \qquad (5)$$

Соңғы теңдеудің сол жағы x ке, оң жағы t ға тиісті емес.

Демек $\frac{T''}{a^2 T}$ және $\frac{X''}{X}$ шамалардың әрбірі x ке де, t ға тиістіемес, яғни олар тұрақты.Бұл тұрақтыны - λ арқылы белгілеп аламыз. Сонда (5) теңдік

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0 \qquad (6)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad (7)$$

Демек, (5) теңдеу екі теңдеуге ажыралады.,бұлардың бірі тек қана x ке тиісті функцияны, екіншісі тек t ға тиісті болған функцияны өз ішіне алады.Бұл жағдайларға айнымалылары ажыралады деп айтылады.

(4) түріндегі (2) шекаралық шарттарды қанағаттандыратын, нолге тең емес $u(x,t)$ шешімін табу үшін (7) теңдеудің

$$X(0) = X(l) = 0 \qquad (8)$$

шекаралық шарттарын қанағаттандыратын нолге тең болмаған шешімін табу керек.
Осыдан кейін біз төмендегі есепке келдік:

λ параметрінің сондай мәндерін табу керек, ол мәндер (7) теңдеу (8) шарттарды қанағаттандыратын нолден өзге шешімге ие болсын. Бұл есеп әдетте спектр есебі немесе Штурм – Лиувилл есебі деп аталады.

λ ның мұндай мәндері (7), (8) есептің сәйкес мәндері (сандары) деп , ал бұл мәндерге сәйкес шешімдері сәйкес функциялары деп аталады.
(7) теңдеудің жалпы шешімі $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ немесе $\lambda > 0$ болуына қарап түрлі көрініске ие болады.

2.Ішектің еріксіз тербеліс теңдеуі үшін Фурье әдісі.

Бір текті шеттері байланған ішектің сыртқы күш әсерінен мәжбүрлі тербелісін тексереміз.
Бұл мәселе осы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (1)$$

теңдеуінің

$$u\big|_{x=0} = 0 \qquad u\big|_{x=l} = 0 \qquad (2)$$

шекаралық шарттарын және

$$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_1(x) \tag{3}$$

шартарын қанағаттандыратын шешімін табудан тұрады. Бұл есептің шешімін

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

көріністе іздейміз. Бұл жерде $v(x,t)$ (1) теңдеудің (2) шекаралық және

$$v\big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0 \tag{4}$$

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын шешімі, ал w

$$\frac{\partial W}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \tag{5}$$

бір текті теңдеудің (2) және (3) шарттарын қанағаттандыратын шешімінен құралады.

(1), (2), (4) есептің шешімін төмендегі қатар түрінде іздейміз:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{6}$$

Енді $T_n(t)$ функцияларды былай анықтаймыз, (6) қатар (1) теңдеуді және (4) бастапқы шарттарды қанағаттандырсын. Осы мақсатта (6) қатарды (1) теңдеуге қойып, осы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t)\right] \sin\frac{n\pi x}{l} = f(x,t) \tag{7}$$

теңдікті шығарып аламыз, бұл жерде

$$\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$$

$f(x,t)$ функцияны (0, l) интервалда синустар бойынша Фурье қатарына жаямыз:

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{8}$$

мұнда

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^1 f(x,t) \sin\frac{n\pi x}{l}\, dx \tag{9}$$

(7) және (8) ларды реттеп, $T_n(t)$ функцияны анықтау үшін тұрақты кщэффициентті

$$T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t) = f_n(t), \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{10}$$

жай дифференциал теңдеуді келтіріп шығарамыз. (6) қатар мен анықталған $u(x,t)$ функция (4) бастапқы шарттарды да қанағаттандыруы үшін $T_n(t)$ функциялар

$$T_n(0)=0, \qquad T_n''(0) = 0 \tag{11}$$

шарттарын қанағаттандыруы жеткілікті.

(10) теңдеудің (11) шарттары қанағаттандыратын шешімі осы

$$T_n(t) = \frac{2}{l\omega_n}\int_0^t f_n(\tau) \sin\omega_n(t-\tau)\, d\tau$$

көрініске ие болады немесе $f_n(t)$ орнына оның (9) өрнегін қойсақ, төмендегіні келтіріп шығарамыз:

$$T_n(t) = \frac{2}{l\omega_n}\int_0^t \sin\omega_n(t-\tau)\, d\tau \int_0^l f_n(x,\tau) \sin\frac{n\pi x}{l}\, dx \tag{12}$$

$T_n(t)$ функцияларының бұл өрнектерін (6) ға қойғаннан соң, пайда болған қатар және бұл қатарды x және t бщйынша екі рет бөлектеп дифференциалдау нәтижесінде пайда болған қатарлар тегіс жақындаушы болса, онда (6) қатар (1) , (2) және (4) есептің шешімінен құралған болады.